

## I.1 — Preferencias, axiomas y utilidad

La versión **legible y rigurosa**: cada demostración viene desarmada paso a paso — la línea **Dice** (lo formal, intacto), la **Traducción** (qué significa), **Para captarlo** (por qué damos el paso y qué quiere decir cada palabra abstracta, con imágenes cotidianas) y un **Ejemplo** con números. El objetivo es que salgas *entendiendo* las pruebas, no memorizándolas.

[ FUENTE: Jehle-Reny §1.1–1.2, pp. 3–19 · Varian cap. 7 | CAPAS: intuición + demostración desarmada + reto | PRERREQ: Módulo 0 | SIGUIENTE: I.2 ]

### § ¿Qué vas a lograr aquí, y por qué importa?

#### OBJETIVO DE LA LECCIÓN

Al terminar vas a poder: (1) **enunciar y demostrar** las consecuencias de los cinco axiomas; (2) **reproducir la prueba** del teorema de representación y explicar dónde entra cada hipótesis; (3) manejar el **aparato diferencial** —TMS por el teorema de la función implícita y el **Hessiano orlado**—; y (4) resolver ejercicios de **cálculo** y de **demostración**.

#### ¿POR QUÉ DEBO ESTUDIAR ESTO?

Porque es el ladrillo cero y porque el examen no pide solo "calcula": pide "**demuestra** que...". Cada axioma es la licencia de un paso posterior; saber **por qué** (con prueba) separa el 8 del 10. La continuidad te deja escribir ***u***; la no-saciedad hace que se gaste todo el ingreso; la convexidad hace única la elección y demostrable el bienestar (Tema IV).

## § Crash course: lo que conviene tener fresco

### REPASO EXPRÉS (HERRAMIENTAS + TÉCNICAS DE PRUEBA)

- **Canastas y espacio.**  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Con dos bienes, un punto del primer cuadrante.
- **Relación binaria**  $\succeq$ : "al menos tan bueno como". El objeto crudo que los axiomas van a domar.
- **Conjunto cerrado / conexo.** Cerrado = contiene sus bordes; conexo = "de una sola pieza".
- **Convexidad y cuasiconcavidad** (Módulo 0, 0.1 y Anexo A). "Preferencias convexas" = "conjuntos mejor-o-igual convexas" = "utilidad cuasicóncava".
- **Teorema de la función implícita** (Módulo 0, 0.3). Si  $u(x_1, x_2) = k$  define  $x_2$  en función de  $x_1$ , su pendiente es  $-u_1/u_2$ . De ahí sale la TMS.
- **Hessiano orlado** (Anexo A). El Hessiano bordeado con el gradiente; su signo prueba cuasiconcavidad.
- **Tres técnicas de prueba** que verás: **por contradicción** (supón lo contrario y explota), **traducción**  $\succeq \leftrightarrow u$  (usar que  $u$  representa), y **cardinalidad** (comparar tamaños de infinito).

## § Diccionario de símbolos

| SÍMBOLO                  | SE LEE                              | EN CRISTIANO                                                                                |
|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \succeq y$            | "al menos tan bueno"                | La preferencia débil (objeto primitivo).                                                    |
| $x \succ y / x \sim y$   | "estrictamente mejor / indiferente" | $\succ$ : mejor y no al revés. $\sim$ : mutuamente $\succeq$ .                              |
| $\succeq(x^0)$           | "mejor o igual que $x^0$ "          | $\{x : x \succeq x^0\}$ . Su forma (convexa o no) es la preferencia.                        |
| $u(\cdot)$               | "utilidad"                          | Un número por canasta con $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succeq y$ .                    |
| <b>TMS</b>               | "tasa marginal de sustitución"      | $u_1/u_2$ : bien 2 cedido por una unidad de bien 1, quedando igual.                         |
| $\bar{H}$                | "Hessiano orlado"                   | El Hessiano bordeado con $\nabla u$ ; su signo prueba cuasiconcavidad.                      |
| <b>1, t1</b>             | "la diagonal"                       | <b>1</b> = $(1, \dots, 1)$ ; <b>t1</b> recorre la recta de 45°.                             |
| $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ | "rationales / reales"               | $\mathbb{Q}$ : fracciones (numerables). $\mathbb{R}$ : todos los decimales (no numerables). |
| $\square / \blacksquare$ | "fin de la demostración"            | Marca que la prueba terminó.                                                                |

## § Cómo leer una demostración en esta guía

Cada prueba viene desarmada en cuatro pistas por paso. **Léelas en este orden** y no te saltes ninguna la primera vez:

**Dice** — la línea **formal** (la demostración de verdad, sin recortar). **Traducción** — qué significa esa línea en español llano. **Para captarlo** — **por qué** damos el paso y qué quiere decir cada palabra abstracta, con imágenes. **Ejemplo** — con números.

¿Ya lo dominas y solo quieres repasar para el examen? Lee **únicamente** las líneas **Dice**: son la prueba completa y rigurosa. Las otras pistas son andamiaje que puedes quitar cuando ya no lo necesites.

## 1 La relación de preferencia (el material crudo)

### ■ IMAGEN

Alguien en el súper con dos carritos solo dice: "este me gusta **al menos tanto** como el otro". Esa señal, para todos los pares, es  $\succeq$ . No pedimos un "medidor de placer".

### ■ FORMAL

$\succeq$  es una **relación binaria** en  $\mathbb{R}_+^n$ . Se derivan  $\succ (x^0) = \{x : x \succ x^0\}$  (mejor o igual),  $\prec (x^0)$  (peor) y  $\sim (x^0)$  (indiferencia). Se definen  $x \succ y$  como " $x \succeq y$  y no  $y \succeq x$ ", y  $x \sim y$  como " $x \succeq y$  y  $y \succeq x$ ".

### ■ POR QUÉ ASÍ

Empezar con  $\succeq$  es la decisión **ordinalista** (Pareto, Hicks): las comparaciones se observan; los números no. Pensar en preferencias = pensar en **formas** de los conjuntos  $\succeq (x^0)$ .

### ▷ RETO

**Demuestra la tricotomía:** para cualquier par, exactamente una de tres cosas ocurre:  $x \succ y$ ,  $x \sim y$  o  $y \succ x$ .

*Traducción del reto: ante dos canastas, siempre pasa una y solo una de: prefieres la primera, te dan*

igual, o prefieres la segunda. **Por dónde empezar:** usa **completitud** (al menos una de  $x \succeq y, y \succeq x$  se cumple) y luego separa en casos según cuál(es) se cumpla(n); las definiciones de  $\succ$  y  $\sim$  hacen el resto.

## 2 Racionalidad: completitud y transitividad

### ■ IMAGEN

**Completitud:** nunca se queda mudo ante un par. **Transitividad:** si prefiere café a té y té a agua, no puede preferir agua a café — o sería una "bomba de dinero" (se le saca dinero dando vueltas en el ciclo).

### ■ FORMAL

J-R, Axiomas 1-2, p. 5

**Axioma 1 (Completitud).** Para todo  $x, y$ :  $x \succeq y$  o  $y \succeq x$ .

**Axioma 2 (Transitividad).** Si  $x \succeq y$  y  $y \succeq z$ , entonces  $x \succeq z$ .

### DEMOSTRACIÓN — LA PREFERENCIA ESTRUCTA $\succ$ ES TRANSITIVA

**Qué queremos probar:** si  $x \succ y$  y  $y \succ z$ , entonces  $x \succ z$ . O sea, el "estrictamente mejor" tampoco tiene ciclos. (Prueba corta y mecánica — aquí no hace falta mucho andamiaje.)

#### EL PLAN

Tenemos que probar dos cosas: que  $x \succeq z$  (fácil, encadenando) y que **no**  $z \succeq x$  (esto lo hacemos **por contradicción**: suponemos que sí y explota).

#### 1 Desarma las hipótesis.

**DICE**  $x \succ y$  significa  $x \succeq y$  y **no**  $y \succeq x$ ;  $y \succ z$  significa  $y \succeq z$  y **no**  $z \succeq y$ .

**TRADUCCIÓN** "Estrictamente mejor" son en realidad **dos datos**: es al menos tan bueno, y además no al revés. Separarlos es lo que da munición para la prueba.

#### 2 Encadena la parte débil.

**DICE** De  $x \succeq y$  y  $y \succeq z$ , por transitividad de  $\succeq$ :  $x \succeq z$ .

**TRADUCCIÓN** Ya tenemos media victoria:  $x$  es al menos tan bueno como  $z$ . Falta descartar que  $z$  también sea al menos tan bueno como  $x$  (si lo fuera, serían indiferentes, no estrictamente mejor).

### 3 Descarta el "regreso" por contradicción.

**DICE** Supón  $z \succ x$ . Con  $x \succ y$ , transitividad da  $z \succ y$ . Pero  $y \succ z$  dice **no**  $z \succ y$ . Absurdo. Luego no  $z \succ x$ , y con  $x \succ z$ :  $x \succ z$ .

**TRADUCCIÓN** Si  $z$  fuera al menos tan bueno como  $x$ , arrastrando con transitividad llegaríamos a que  $z$  es al menos tan bueno como  $y$  — justo lo que  $y \succ z$  prohíbe. Como se contradice, el "regreso" es imposible:  $x$  es estrictamente mejor que  $z$ .

#### PARA CAPTARLO

La **prueba por contradicción** es tu herramienta más usada: cuando quieres probar "**no** pasa X", supón que **sí** pasa y muestra que eso choca con algo que ya sabías. Aquí "X" es el regreso  $z \succeq x$ ; suponerlo revienta la hipótesis  $y \succ z$ . Memoriza el molde: "*supongamos que sí... entonces... pero eso contradice... luego no.*"

#### ■ EN MICRO

Compleitud + transitividad son la base del Teorema 1.1 (§6). Sin transitividad, un ciclo  $x \succ y \succ z \succ x$  no se puede etiquetar con números.

#### ▷ RETO

**Demuestra que la indiferencia  $\sim$  es transitiva:** si  $x \sim y$  y  $y \sim z$ , entonces  $x \sim z$ .

**Traducción del reto:** si te dan igual A y B, y te dan igual B y C, entonces te dan igual A y C. **Por dónde empezar:** recuerda que  $x \sim y$  son **dos** desigualdades ( $x \succeq y$  y  $y \succeq x$ ). Aplica transitividad de  $\succeq$  en cada dirección por separado y junta.

## 3 Regularidad: continuidad

#### ■ IMAGEN

Si canastas "al menos tan buenas como  $x$ " se acercan a un límite, ese límite **también** es al menos tan bueno. No hay "traiciones en el último milímetro".

## ■ FORMAL

J-R, Axioma 3, p. 8 (**Continuidad**). Para todo  $x$ , los conjuntos  $\succ (x)$  y  $\preceq (x)$  son **cerrados** en  $\mathbb{R}_+^n$ . Equivale a: si  $y_n \succ x$  para todo  $n$  y  $y_n \rightarrow y$ , entonces  $y \succ x$ .

## ■ POR QUÉ ASÍ

Es el axioma **topológico**: casi no habla de gusto, solo evita saltos. El mejor modo de entender qué compra es ver quién lo **viola**: las preferencias lexicográficas.

### DEMOSTRACIÓN – LAS PREFERENCIAS LEXICOGRAFICAS NO ADMITEN FUNCIÓN DE UTILIDAD

**Qué queremos probar**: que estas preferencias, aunque son "racionales" (completas y transitivas), **no** se pueden describir con ningún número de utilidad — ni siquiera uno discontinuo.

#### EL PLAN (LA IDEA ANTES DE LOS SÍMBOLOS)

Vamos a suponer que sí existe una utilidad  $u$  y, con ella, **fabricar** una segunda cosa que sea **imposible**. Cuando algo que supones lleva a un imposible, la suposición era falsa. Ese "imposible" será: meter **todos** los números reales dentro de las fracciones sin repetir ninguno — y las fracciones "no alcanzan".

#### 1 En cada "columna" $r$ , tener un poquito del bien 2 ya mejora.

**DICE** Como  $(r, 1) \succ (r, 0)$ , entonces  $u(r, 1) > u(r, 0)$ . Elige un racional  $q(r)$  con  $u(r, 0) < q(r) < u(r, 1)$ .

**TRADUCCIÓN** Piensa en  $r$  como "la columna número  $r$ " (el primer bien fijo en ese valor). Dentro de esa columna, la canasta con **1** del segundo bien es mejor que la que tiene **0**; por eso su utilidad es un número más grande. Entre esos dos números metemos un tercero —que sea fracción— y lo bautizamos  $q(r)$ : la **etiqueta** de la columna  $r$ .

#### PARA CAPTARLO (SIN PRISA)

¿Por qué "fabricamos"  $q$ ? No podemos revisar "todas las utilidades posibles" para ver que ninguna sirve: son infinitas. Así que hacemos el **truco de detective**: suponemos que el sospechoso existe (una  $u$  que sí funciona) y seguimos el **rastro que tendría que dejar** hasta mostrar que ese rastro es imposible.  $q$  es ese rastro: una función que **no venía en el problema**, la construimos con las piezas de  $u$ , a propósito para que en el paso 3 se estrelle. "Función auxiliar" = ayudante que inventamos solo para la prueba.

¿Qué es "un racional entre dos reales"? Un **racional** es un número que se escribe como fracción:  $2.5 = \frac{5}{2}$  sí;  $\pi = 3.14159\dots$  no. "Siempre cabe uno entre dos reales distintos": por más pegados que estén dos decimales, entre ellos hay una fracción. Entre **2.3** y **2.8** está

2.5; entre 2.71 y 2.72 está 2.715; entre 2.7180 y 2.7181 está 2.71805. Nunca se acaban "en lo chiquito" (los racionales son **densos**).

¿Por qué justo una fracción, no cualquier número? Astucia con vista al final: en el paso 3 vamos a contar, y hay pocas fracciones y muchísimos reales. Elegir fracción ahora es tenderle la trampa al paso 3.

**EJEMPLO** Columna  $r = 1$ : supón  $u(1, 0) = 2.3$  y  $u(1, 1) = 2.8$ . Elige  $q(1) = 2.5$  (es fracción y cae en medio).

## 2 Columnas más a la derecha tienen etiqueta más grande.

**DICE** Si  $r < r'$ , entonces  $(r', 0) \succ (r, 1)$ , luego  $u(r', 0) > u(r, 1)$ . Encadenando:  $q(r') > u(r', 0) > u(r, 1) > q(r)$ , o sea  $q(r) < q(r')$ .

**TRADUCCIÓN** Cualquier canasta con más del primer bien le gana a cualquiera con menos del primer bien, **aunque** la otra tenga muchísimo del segundo. Por eso la etiqueta de una columna a la derecha siempre supera a la de una a la izquierda:  $q$  sube cuando  $r$  sube.

### PARA CAPTARLO

"Lexicográfico" = como el diccionario. Para ordenar palabras, primero miras la primera letra; solo si empatan, miras la segunda. Aquí igual: manda el bien 1, y el bien 2 **solo desempata**. Por eso  $(2, 0)$  le gana a  $(1, 1000)$ :  $2 > 1$  en el primer bien y punto. Consecuencia:  $q$  es **estrictamente creciente** (siempre sube, nunca repite).

**EJEMPLO**  $r = 1$ ,  $r' = 2$ : gana  $(2, 0)$  sobre  $(1, 1000)$ . Con números:  $q(1) = 2.5$  y  $q(2) = 5.1$ , y en efecto  $q(1) < q(2)$ .

## 3 No alcanzan las fracciones: ahí está el imposible.

**DICE**  $q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Q}$  es estrictamente creciente, luego **inyectiva**. Pero  $[0, \infty)$  es **no numerable** y  $\mathbb{Q}$  es **numerable**: no existe inyección de un no numerable en un numerable.

**TRADUCCIÓN** Como  $q$  nunca repite, le da a **cada** real  $r \geq 0$  una fracción **distinta**. Eso sería "una fracción por cada real, sin repetir". Imposible: hay muchísimos más reales que fracciones.

### PARA CAPTARLO (SIN PRISA)

"Inyectiva" no da miedo: solo quiere decir "**no repite**" — a cada entrada, una salida distinta. Como  $q$  siempre sube, nunca da la misma fracción a dos columnas.

**Hay infinitos de distinto tamaño (la clave).** Las **fracciones** se pueden "formar en fila" y numerar: la  $1^a$ , la  $2^a$ , la  $3^a$ ... (se les llama **numerales**). Los **reales** (todos los decimales, con colas infinitas) **no** caben en ninguna lista: siempre se te escapa uno (son **no numerales**, "más"). Un infinito más grande que otro.

**Por qué es el muro:**  $q$  pretende dar a cada real su propia fracción sin repetir. Es como **sentar a un estadio lleno** (los reales, un gentío continuo) en una **fila de sillas numeradas** (las fracciones): por más sillas, **sobra gente**. Contradicción.

**IMAGEN** Fracciones = boletos numerados (1, 2, 3, ...); reales = fila continua e infinita de personas. Un boleto por persona sin repetir  $\rightarrow$  se acaban los boletos.

✓ **Cierre.**

**CONCLUSIÓN** Partimos de "existe  $u$ " y llegamos a un imposible  $\Rightarrow$  **no existe  $u$**  que represente las lexicográficas.

**LA MORALEJA (POR QUÉ NOS IMPORTA)**

Lo que falló es que estas preferencias dan un **salto**: el bien 1 aplasta de golpe cualquier cantidad del bien 2. La **continuidad** (Axioma 3) es exactamente la regla que **prohíbe esos saltos** — por eso, cuando la exigimos, patologías como esta desaparecen y sí se puede construir  $u$  (Teorema 1.1). ■

■ **EN MICRO**

Sin continuidad no hay  $u$  continua; sin  $u$  continua, Weierstrass (Módulo 0, 0.3) no garantiza canasta óptima. Es el primer eslabón hacia "existe la demanda".

▷ **RETO**

**Muestra directamente** que las lexicográficas violan el Axioma 3.

**Traducción del reto:** encuentra una sucesión de canastas todas "al menos tan buenas como  $x$ " que se acerque a un límite que **sí** es peor que  $x$  (ahí se rompe "el conjunto es cerrado"). **Por dónde empezar:** fija  $x = (1, 1)$  y acércate por la izquierda con  $y_n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$ ; revisa si cada  $y_n \succeq x$  y qué pasa con el límite  $(1, 0)$ .

## 4 Gustos (I): monotonía y no-saciedad

■ **IMAGEN**

**No-saciedad local:** por más contento que estés, **siempre** hay una canasta arbitrariamente cercana que prefieres. **Monotonía estricta:** más de **todo** te deja estrictamente mejor.



J-R, Axiomas 4' y 4, pp. 9-10

**Axioma 4' (No-saciedad local, LNS).** Para todo  $x^0$  y todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x \in B_\varepsilon(x^0)$  con  $x \succ x^0$ .

**Axioma 4 (Monotonía estricta).**  $x^0 \geq x^1 \Rightarrow x^0 \succeq x^1$ ;  $x^0 \gg x^1 \Rightarrow x^0 \succ x^1$ .

#### DEMOSTRACIÓN – NO-SACIEDAD LOCAL $\Rightarrow$ EL CONSUMIDOR GASTA TODO EL INGRESO

Qué queremos probar: si  $x^*$  es la mejor canasta que el consumidor puede pagar, entonces **no le sobra dinero**:  $p \cdot x^* = m$ . Es lo que convierte " $\leq$ " en " $=$ " y permite usar Lagrange en I.2.

##### EL PLAN

**Por contradicción.** Suponemos que sí sobra dinero y mostramos que entonces  $x^*$  no podía ser el mejor — porque muy cerca hay algo mejor y todavía asequible.

#### 1 Supón que sobra dinero.

**DICE** Supón  $p \cdot x^* < m$ .

**TRADUCCIÓN** El costo de la canasta elegida es **menor** que el ingreso: quedó dinero sin usar. Vamos a ver que eso es incompatible con "ser la mejor".

#### 2 La no-saciedad ofrece algo mejor cerquita.

**DICE** Por LNS, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in B_\varepsilon(x^*)$  con  $x \succ x^*$ .

**TRADUCCIÓN** No importa qué tan pequeño sea el vecindario alrededor de  $x^*$ : siempre hay dentro una canasta que el consumidor prefiere. (Eso es "nunca del todo saciado".)

#### 3 Ese "algo mejor" todavía cabe en el presupuesto.

**DICE** Como  $p \cdot x$  es continua y  $p \cdot x^* < m$ , tomando  $\varepsilon$  suficientemente chico todo  $x \in B_\varepsilon(x^*)$  cumple  $p \cdot x < m$ . Ese  $x$  es asequible y  $x \succ x^*$ : contradicción. Luego  $p \cdot x^* = m$ .

**TRADUCCIÓN** Si sobraba dinero, hay un "colchón" entre el gasto y el ingreso. Movernos un poquito (a una canasta cercana) casi no cambia el gasto, así que seguimos por debajo del ingreso. Entonces esa canasta cercana y mejor **también se puede pagar** — y eso convierte a  $x^*$  en "no óptimo". Absurdo: no podía sobrar dinero.

##### PARA CAPTARLO

**La idea con una imagen:** imagina que compraste y te sobraron

*20. Como si siempre quieres un poquito más!* (LNS) y 20 alcanzan para ese "poquito", te conviene gastarlos  $\rightarrow$  tu compra original no era la mejor. La **continuidad de  $p \cdot x$**  es la que

garantiza que un cambio pequeño de canasta solo cambia el gasto por poquito (no de golpe), así que el colchón de \$20 no se rompe.

#### ■ EN MICRO

"Se gasta todo" vuelve  $p \cdot x \leq m$  en la igualdad  $p \cdot x = m$ : base de Lagrange en I.2 y del Primer Teorema del Bienestar (Tema IV). A este resultado se le llama **Ley de Walras** a nivel individual.

#### ▷ RETO

**Demuestra que monotonía estricta  $\implies$  no-saciedad local** (y convéncete de que el recíproco no vale).

*Traducción del reto:* si "más de todo es mejor", entonces cerca de cualquier canasta hay algo preferido.

*Por dónde empezar:* dado  $x^0$  y un  $\varepsilon > 0$ , construye una canasta a distancia menor que  $\varepsilon$  con un poquito más de **todos** los bienes (p. ej. suma  $\varepsilon/2n$  a cada coordenada) y aplica monotonía estricta.

## 5 Gustos (II): convexidad, la TMS y el aparato diferencial

#### ■ IMAGEN

Si te da igual "10 tacos y 0 refrescos" que "0 y 10", la mezcla "5 y 5" debería gustarte **al menos tanto** (convexidad) o **más** (estricta). Amar la variedad = curvas de indiferencia abombadas hacia el origen.

#### ■ FORMAL

J-R, Axiomas 5' y 5, pp. 11-12

**Axioma 5' (Convexidad).** Si  $x^1 \succeq x^0$  entonces  $tx^1 + (1-t)x^0 \succeq x^0$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Axioma 5 (Estricta).** Si  $x^1 \neq x^0$  y  $x^1 \succeq x^0$  entonces  $tx^1 + (1-t)x^0 \succ x^0$ ,  $t \in (0, 1)$ .

#### DEMOSTRACIÓN — CONVEXIDAD DE $\succeq \iff$ CUASICONCAVIDAD DE $u$

**Qué queremos probar:** que "preferencias convexas" y "utilidad cuasicóncava" son **la misma cosa** dicha en dos idiomas. Como es un "si y solo si" ( $\iff$ ), hay que probar **las dos direcciones**.

#### EL PLAN

Toda la prueba es **traducir** entre dos idiomas usando el puente  $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ . Primero traducimos de "preferencias" a "utilidad" ( $\Rightarrow$ ); luego de vuelta ( $\Leftarrow$ ).

#### ANTES DE EMPEZAR: ¿QUÉ ES "CUASICÓNCAVA"?

$u$  es **cuasicónca** si al mezclar dos canastas el resultado **no es peor que la peor** de las dos:  $u(\text{mezcla}) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ . El **min** ("el menor de los dos") aparece porque solo pedimos no caer por debajo del **piso** que ponen las dos canastas. En imagen: los conjuntos "de aquí para arriba"  $\{u \geq k\}$  son **convexos** (sin abolladuras) — que es justo "preferencias convexas".

#### 1 Ida ( $\Rightarrow$ ): de preferencias convexas a $u$ cuasicónca.

**DICE** Supón  $\succeq$  convexa. Sin pérdida  $u(x) \geq u(y)$ , o sea  $x \succeq y$ . Por 5':  $tx + (1-t)y \succeq y$ . Traduciendo:  $u(tx + (1-t)y) \geq u(y) = \min\{u(x), u(y)\}$ .

**TRADUCCIÓN** Tomamos la canasta que no es peor ( $x$ ). La convexidad dice que la mezcla es al menos tan buena como  $y$ . Como  $y$  es la peor de las dos, la mezcla queda por encima del piso: eso es cuasiconcavidad.

#### 2 Vuelta ( $\Leftarrow$ ): de $u$ cuasicónca a preferencias convexas.

**DICE** Supón  $u$  cuasicónca. Si  $x \succeq y$  entonces  $u(x) \geq u(y)$ ; por cuasiconcavidad  $u(tx + (1-t)y) \geq u(y)$ , luego  $tx + (1-t)y \succeq y$ : es 5'.

**TRADUCCIÓN** Ahora vamos al revés: partimos de la propiedad de la utilidad y recuperamos la de las preferencias. Es el mismo puente cruzado en dirección contraria.

#### PARA CAPTARLO

**Por qué probar "las dos direcciones".** Un " $\Leftrightarrow$ " (si y solo si) afirma que dos cosas son **equivalentes**. Para eso hay que mostrar que cada una **implica** la otra: si solo probaras " $\Rightarrow$ ", podría pasar que  $u$  cuasicónca sin preferencias convexas. La técnica clave —**traducir con el puente**  $\succeq \leftrightarrow u$ — es la misma de casi todo I.1.

■

## ■ APARATO DIFERENCIAL: LA TMS POR LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Sobre una curva de indiferencia  $u(x_1, x_2) = k$ , el diferencial total es  $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = 0$ . Si  $u_2 \neq 0$  (teorema de la función implícita), la pendiente es  $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2}$ , y

$$\text{TMS} = \left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| = \frac{u_1}{u_2}.$$

**TMS decreciente** (condición de segundo orden = cuasiconcavidad) se prueba con el **Hessiano orlado**:  $\det \bar{H} = 2u_1 u_2 u_{12} - u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22} \geq 0$ . Para  $u = x^a y^b$ :  $\det \bar{H} = ab(a+b)x^{3a-2}y^{3b-2} > 0$ .

### PARA CAPTARLO – DE DÓNDE SALE LA FÓRMULA DE LA TMS

**La idea:** sobre una curva de indiferencia la utilidad **no cambia**. Si te mueves un pasito  $dx_1$  en el bien 1, tienes que compensar con un  $dx_2$  en el bien 2 para **seguir igual de contento**. "Seguir igual" en fórmula es  $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 = 0$  (la utilidad ganada por un lado se cancela con la pérdida por el otro).

Despejando la razón de intercambio  $dx_2/dx_1$  sale  $-u_1/u_2$ . El signo menos es porque subes uno y bajas el otro; la TMS es su tamaño (valor absoluto). El  $u_2 \neq 0$  del teorema de la función implícita solo pide que el bien 2 "sí importe" en el margen (si no, no podrías compensar con él).

## ■ POR QUÉ ASÍ

Aquí se cobran 0.1, 0.3 y el Anexo A: "convexa" = "cuasicóncava" = "TMS decreciente". La TMS **no es** una definición aparte: es la pendiente de la curva de nivel. El Hessiano orlado es la **prueba mecánica** de que la curva se abomba del lado correcto.

### ▷ RETO

(a) Demuestra que convexidad estricta  $\implies \succeq (x^0)$  es estrictamente convexo (sin tramos rectos). (b) Calcula  $\det \bar{H}$  para  $u = x^{1/2}y^{1/2}$  y verifica que es  $> 0$ .

**Traducción del reto:** (a) que las curvas de indiferencia no tengan segmentos rectos; (b) confirmar con la fórmula que la Cobb–Douglas es cuasicóncava. **Por dónde empezar:** (a) toma dos puntos distintos del conjunto "mejor o igual" y aplica el Axioma 5 a su mezcla; (b) usa  $\det \bar{H} = ab(a+b)x^{3a-2}y^{3b-2}$  con  $a = b = \frac{1}{2}$ .

## 6 De preferencias a utilidad: el teorema de representación

### ■ IMAGEN

La utilidad es la **altitud en un mapa**: los números de las curvas de nivel dicen qué es más alto, pero el cero es convención. Probaremos que esa "altitud" **siempre** se puede asignar de forma continua bajo los axiomas.

### ■ FORMAL

**Teorema 1.1 (Existencia)** J-R, p. 14. Si  $\succeq$  es completa, transitiva, continua y estrictamente monótona, existe  $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  **continua** que la representa. **Teorema 1.2 (Ordinalidad)** J-R, p. 17: si  $u$  representa a  $\succeq$  y  $f$  es estrictamente creciente,  $f(u)$  representa las **mismas** preferencias.

### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1 – CONSTRUCCIÓN POR LA DIAGONAL

#### EL PLAN (LA IDEA ANTES DE LOS SÍMBOLOS)

A cada canasta  $x$  le vamos a asignar **un número**: el punto de la **recta de 45°** (la "diagonal") que le es **indiferente**. Ese número será  $u(x)$ . Es como medir la "altura" de  $x$  viendo en qué punto de una regla diagonal empata con ella. Luego probamos que ese número (1) siempre existe, (2) es único, (3) respeta el orden y (4) es continuo.

#### ¿QUÉ ES "LA DIAGONAL" Y POR QUÉ USARLA?

La diagonal es el conjunto de canastas **parejas**:  $(t, t, \dots, t)$  para  $t \geq 0$  — la misma cantidad de todos los bienes. La llamamos  **$t\mathbf{1}$** . Sirve como una **regla graduada**: si subo por la diagonal, por monotonía voy mejorando sin ambigüedad. La jugada es "colgar" cada canasta  $x$  del punto de la diagonal que le empata, y usar ese  $t$  como su calificación.

#### 1 Preparación: parte la diagonal en dos.

**DICE** Sea  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ . Fija  $x$  y define  $A = \{t \geq 0 : t\mathbf{1} \succeq x\}$  y  $B = \{t \geq 0 : x \succeq t\mathbf{1}\}$ .

**TRADUCCIÓN** Recorre la diagonal:  $A$  son los puntos de la regla que son **al menos tan buenos** como  $x$ ;  $B$ , los que son **no mejores**. Buscamos el punto donde se tocan (ahí estará el empate).

#### 2 La regla entera queda cubierta.

**DICE** Por completitud  $A \cup B = [0, \infty)$ . Ambos no vacíos:  $0 \in B$  (monotonía:  $x \succeq \mathbf{0}$ ); para  $t$  grande,  $t\mathbf{1} \gg x \Rightarrow t \in A$ .

**TRADUCCIÓN** Todo punto de la regla cae en "mejor-o-igual" o en "no-mejor" (completitud). Y ninguno de los dos grupos está vacío: abajo (el origen)  $x$  gana; muy arriba, la diagonal gana. O sea, empezamos en  $B$  y terminamos en  $A$ .

### 3 Existe el empate (aquí entra la continuidad).

**DICE**  $A$  y  $B$  son cerrados (preimágenes de  $\succeq(x)$ ,  $\preceq(x)$  bajo  $t \mapsto t1$ , continua). Dos cerrados no vacíos que cubren el conexo  $[0, \infty)$  deben tocarse: existe  $t^*$  con  $t^*1 \sim x$ .

**TRADUCCIÓN** Como no hay "saltos" (continuidad), al pasar de la zona donde gana  $x$  a la zona donde gana la diagonal, hay un punto **exacto** donde quedan **empatados**. Ese  $t^*$  es la calificación de  $x$ .

#### PARA CAPTARLO

**Por qué la continuidad es imprescindible aquí.** " $[0, \infty)$  es conexo" quiere decir que es una línea de una sola pieza, sin huecos. Si el "al menos tan bueno" y el "no mejor" fueran **cerrados** (sin saltos) y juntos cubren toda la línea, no pueden encajar como dos piezas separadas: **tienen que solaparse** en al menos un punto — el empate. Si hubiera un salto (como en las lexicográficas), la línea se partiría sin punto de contacto y **no habría empate**: por eso ahí no se puede definir  $u$ . Este paso es el corazón del teorema.

### 4 El empate es único (monotonía estricta).

**DICE**  $t_1 > t_2 \Rightarrow t_11 \gg t_21 \Rightarrow t_11 \succ t_21$ : sobre la diagonal no hay dos puntos indiferentes. Define  $u(x) := t^*$ .

**TRADUCCIÓN** Subir por la diagonal siempre mejora estrictamente, así que dos puntos distintos de la regla nunca empatan entre sí. Por eso el punto que empata con  $x$  es **uno solo** — la calificación está bien definida, sin ambigüedad.

### 5 La calificación respeta el orden.

**DICE**  $x \succeq y \Leftrightarrow u(x)1 \sim x \succeq y \sim u(y)1 \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$  (transitividad + monotónia en la diagonal).

**TRADUCCIÓN**  $x$  es al menos tan buena como  $y$  exactamente cuando su punto de empate en la diagonal está más arriba. O sea:  $u$  le pone número más grande a lo que prefieres. Eso es "representar".

### 6 La calificación es continua.

**DICE**  $\{u \geq a\} = \succeq(a1)$  y  $\{u \leq a\} = \preceq(a1)$  son cerrados  $\Rightarrow u$  continua.

**TRADUCCIÓN** Los "niveles" de  $u$  coinciden con conjuntos de preferencia que ya sabemos cerrados (por el Axioma 3). Una función cuyos niveles son cerrados no da saltos: es continua. La continuidad de  $u$  la **hereda** de la de  $\succeq$ .

## POR QUÉ ASÍ

Cada axioma "compró" un paso: completitud/monotonía cubren la diagonal (2), continuidad da el empate (3), monotonía estricta lo hace único (4). El Teorema 1.2 es la moraleja: como  $f(u)$  sirve igual, la **concavidad** de  $u$  no es observable (Anexo A) pero la **cuasiconcavidad** sí.

### ▷ RETO

**Demuestra el Teorema 1.2:** si  $u$  representa  $\succeq$  y  $f$  es estrictamente creciente, entonces  $f(u)$  también.

**Traducción del reto:** reetiquetar la utilidad con una función que respeta el orden (como  $\ln$ , o "+7") no cambia las preferencias. **Por dónde empezar:** escribe la cadena  $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$ ; la última equivalencia es justo " $f$  estrictamente creciente".

## 7 Las cinco familias de utilidad (con su TMS)

El "bestiario" que reaparece en I.2–I.5. La TMS sale siempre de  $u_1/u_2$  (función implícita, §5). Varian, cap. 7

| FAMILIA                | $u(x, y)$                    | TMS = $u_x/u_y$                | RASGO CLAVE                                                   |
|------------------------|------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Cobb–Douglas           | $x^a y^b$                    | $\frac{a}{b} \frac{y}{x}$      | Gasto en cada bien = fracción fija del ingreso                |
| Sustitutos perfectos   | $ax + by$                    | $\frac{a}{b}$ (constante)      | Solución de esquina (salvo empate)                            |
| Complementos perfectos | $\min\{ax, by\}$             | indefinida en el vértice       | Proporción fija $ax = by$                                     |
| CES                    | $(x^\rho + y^\rho)^{1/\rho}$ | $(x/y)^{\rho-1}$               | Elasticidad $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ ; engloba a las demás |
| Cuasilineal            | $v(x) + y$                   | $v'(x)$ (solo depende de $x$ ) | Sin efecto ingreso sobre $x$                                  |

**Por qué estas cinco.** Cubren el espectro de sustituibilidad: sustitutos (rectas) y complementos (L) son los extremos; la CES es el dial ( $\rho \rightarrow 1$ : sustitutos;  $\rho \rightarrow 0$ : Cobb–Douglas;  $\rho \rightarrow -\infty$ : complementos); la cuasilineal es el caso sin efecto ingreso (clave para bienestar en I.5). Domínalas y I.2–I.5 se vuelven mecánicas.

## 8 El gran porqué: hacia dónde va esto

Todo I.1 colapsa en: **los axiomas convierten "gustos" en una  $u$  manejable, y cada axioma es la licencia — demostrable— de un paso futuro.**

- **Completa + transitiva + continua + monótona** → **existe  $u$  continua** (Teorema 1.1, ya lo probaste).  
Habilita  **$\max u(x)$**  de I.2.
- **No-saciedad** → **se gasta todo** (lo demostraste en §4). La restricción se vuelve igualdad y entra Lagrange.
- **Convexidad** → **cuasiconcavidad** → **TMS decreciente** (§5). Hace única la elección, suficiente la CPO  
 **$\text{TMS} = p_1/p_2$** , y demostrables los teoremas del bienestar (Tema IV).

Y el reverso: si la convexidad falla, la elección puede no ser única ni sostenible con precios — la puerta a los fallos de mercado. En I.1 **plantaste y demostraste** las condiciones; en I.2 las cosechas como demanda.

## A Parte A · Diez ejercicios resueltos (nivel 1 → 10)

Mezcla de **cálculo** y **demostración** (los marcados así). Tapa la solución, intenta, compara. Lee el **CÓMO**, el **POR QUÉ/LA TÉCNICA** y la **REFERENCIA**.

### NIVEL 1 · CÁLCULO

Habilidad: TMS de una Cobb–Douglas simple.

**Problema.** Con  $u(x, y) = xy$ , calcula la TMS en **(2, 3)** e interprétala.

### CÓMO SE RESUELVE

$u_x = y$ ,  $u_y = x \Rightarrow \text{TMS} = \frac{y}{x}$ . En **(2, 3)**:  $\frac{3}{2} = 1.5$ .

### POR QUÉ ASÍ

La TMS es  $u_x/u_y$  porque es la pendiente de la curva de indiferencia (función implícita, §5). **1.5** = una unidad más de  $x$  "vale" **1.5** de  $y$ .

### REFERENCIA

Jehle–Reny, §1.2, p. 12 ; Varian, cap. 7 .



## NIVEL 2 · CÁLCULO

Habilidad: TMS constante de sustitutos perfectos.

**Problema.** Con  $u(x, y) = 2x + y$ , calcula la TMS y explica por qué no depende de la canasta.

### CÓMO SE RESUELVE

$u_x = 2$ ,  $u_y = 1 \Rightarrow \text{TMS} = 2$ , constante: curvas de indiferencia rectas de pendiente  $-2$ .

### POR QUÉ ASÍ

Al ser  $u$  lineal, las utilidades marginales son constantes. Anticipa demanda de **esquina** en I.2.

### REFERENCIA

Jehle-Reny, §1.2 ; Varian, cap. 7 .

## NIVEL 3 · DEMOSTRACIÓN

Habilidad: probar la transitividad de la preferencia estricta.

**Problema.** Con  $\succsim$  completa y transitiva, demuestra que  $x \succ y$  y  $y \succ z$  implican  $x \succ z$ .

### CÓMO SE RESUELVE

$x \succ y \Rightarrow x \succsim y$ ;  $y \succ z \Rightarrow y \succsim z$ . Transitividad:  $x \succsim z$ . Falta no  $z \succsim x$ : si  $z \succsim x$ , con  $x \succ y$  da  $z \succ y$ , contradiciendo  $y \succ z$ . Luego  $x \succ z$ .  $\square$

### LA TÉCNICA

**Por contradicción** sobre el "regreso"  $z \succsim x$ , traduciendo  $\succ$  a  $\succsim$  + su negación. (Detalle completo en §2.)

### REFERENCIA

Jehle-Reny, §1.2, Axiomas 1-2, p. 5 .

#### NIVEL 4 · CÁLCULO

Habilidad: ordinalidad vía TMS.

**Problema.** Muestra que  $u = xy$  y  $v = \ln x + \ln y$  dan las mismas preferencias, comparando TMS.

#### CÓMO SE RESUELVE

$v = \ln(xy) = \ln u$ ,  $\ln$  creciente  $\Rightarrow$  (Teorema 1.2) mismas preferencias. TMS de  $u$ :  $y/x$ ; de  $v$ :  $\frac{1/x}{1/y} = y/x$ .  
Iguales.

#### POR QUÉ ASÍ

La TMS es ordinal: invariante a transformaciones crecientes. Por eso la concavidad no es observable pero la TMS sí.

#### REFERENCIA

Jehle-Reny, Teorema 1.2, p. 17 .

#### NIVEL 5 · DEMOSTRACIÓN

Habilidad: probar que no-saciedad local agota el presupuesto.

**Problema.** Demuestra que si  $\succeq$  cumple LNS y  $x^*$  resuelve  $\max u$  s.a.  $p \cdot x \leq m$  ( $p \gg 0$ ), entonces  $p \cdot x^* = m$ .

#### CÓMO SE RESUELVE

Supón  $p \cdot x^* < m$ . Por LNS hay  $x \in B_\varepsilon(x^*)$  con  $x \succ x^*$ . Como  $p \cdot x$  es continua y  $p \cdot x^* < m$ , con  $\varepsilon$  chico ese  $x$  cumple  $p \cdot x < m$ : asequible y preferido  $\Rightarrow x^*$  no óptimo. Contradicción. Luego  $p \cdot x^* = m$ .  $\square$

#### LA TÉCNICA

Por contradicción: "si sobra dinero, LNS + continuidad de  $p \cdot x$  fabrican algo mejor y asequible". (Detalle completo en §4.)

#### REFERENCIA

Jehle-Reny, §1.2-1.3 ; Mas-Colell-Whinston-Green, cap. 2-3 .

**NIVEL 6 · CÁLCULO + PRUEBA**

Habilidad: TMS decreciente vía Hessiano orlado.

**Problema.** Para  $u = x^{1/2}y^{1/2}$ , calcula  $\det \bar{H}$  y concluye cuasiconcavidad; verifica que la TMS decrece sobre  $xy = 36$ .

**CÓMO SE RESUELVE**

Fórmula general:  $\det \bar{H} = ab(a+b)x^{3a-2}y^{3b-2}$ . Con  $a = b = \frac{1}{2}$ :  $\det \bar{H} = \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2} = \frac{1}{4\sqrt{xy}} > 0 \Rightarrow$  cuasicóncava. TMS =  $y/x$ : en  $(2, 18), (6, 6), (9, 4)$  da  $9, 1, \frac{4}{9}$  — decrece.

**POR QUÉ ASÍ**

$\det \bar{H} > 0$  es la condición de segundo orden de cuasiconcavidad; equivale a TMS decreciente = curvas de indiferencia convexas.

**REFERENCIA**

Jehle-Reny, §1.2, p. 12 ; Módulo 0, Anexo A.

**NIVEL 7 · DEMOSTRACIÓN**

Habilidad: probar convexidad de  $\succeq \Leftrightarrow$  cuasiconcavidad de  $u$ .

**Problema.** Con  $u$  representando  $\succeq$ , demuestra:  $\succeq$  convexa (5')  $\Leftrightarrow u$  cuasicóncava.

**CÓMO SE RESUELVE**

$(\Rightarrow) u(x) \geq u(y) \Rightarrow x \succeq y$ ; por 5',  $tx + (1-t)y \succeq y \Rightarrow u(tx + (1-t)y) \geq u(y) = \min$ .  $(\Leftarrow)$   $x \succeq y \Rightarrow u(x) \geq u(y)$ ; cuasiconcavidad da  $u(tx + (1-t)y) \geq u(y) \Rightarrow tx + (1-t)y \succeq y = 5'$ .  $\square$

**LA TÉCNICA**

Traducir  $\succeq \leftrightarrow u$  en ambos sentidos (es un " $\Leftrightarrow$ ", hay que probar las dos direcciones). Detalle en §5.

**REFERENCIA**

Jehle-Reny, §1.2, pp. 11-13 ; Mas-Colell-Whinston-Green, cap. 3 ; Anexo A.

**NIVEL 8 · CÁLCULO**

Habilidad: CES como dial y su elasticidad.

**Problema.** Para  $u = (x^\rho + y^\rho)^{1/\rho}$ , deriva la TMS y evalúa los límites  $\rho \rightarrow 0$  y  $\rho \rightarrow 1$ ; da  $\sigma$  para  $\rho = \frac{1}{2}$ .

**CÓMO SE RESUELVE**

**TMS**  $= (x/y)^{\rho-1} = (y/x)^{1-\rho}$ .  $\rho \rightarrow 0$ :  $\rightarrow y/x$  (Cobb–Douglas).  $\rho \rightarrow 1$ :  $\rightarrow 1$  (sustitutos). Elasticidad  $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ ; con  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma = 2$ .

**POR QUÉ ASÍ**

$\rho$  controla  $\sigma$  (qué tan fácil se cambia un bien por otro). Un parámetro, todo el espectro.

**REFERENCIA**

Jehle–Reny, cap. 1 ; Varian, cap. 7 .

**NIVEL 9 · DEMOSTRACIÓN**

Habilidad: probar que las lexicográficas no son representables.

**Problema.** Demuestra que las preferencias lexicográficas en  $\mathbb{R}_+^2$  no admiten función de utilidad.

**CÓMO SE RESUELVE**

Supón  $u$ . Para cada  $r$ :  $(r, 1) \succ (r, 0) \Rightarrow u(r, 1) > u(r, 0)$ ; elige racional  $q(r) \in (u(r, 0), u(r, 1))$ . Si  $r < r'$ :  $(r', 0) \succ (r, 1) \Rightarrow q(r') > q(r)$ . Entonces  $q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Q}$  es estrictamente creciente  $\Rightarrow$  inyectiva: imposible (no numerable  $\rightarrow$  numerable).  $\square$

**LA TÉCNICA**

**Cardinalidad:** fabricar una inyección de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{Q}$  es la contradicción. (Desarrollo completo y desmenuzado en §3.)

**REFERENCIA**

Jehle–Reny, §1.2, p. 8 ; Mas-Colell–Whinston–Green, cap. 3 ; Debreu (1959), cap. 4 .

## NIVEL 10 · DEMOSTRACIÓN (capstone)

Habilidad: probar que la convexidad estricta da demanda única.

**Problema.** Demuestra que si  $\succeq$  es **estrictamente convexa**, la solución del problema del consumidor ( $\max u$  s.a.  $p \cdot x = m$ ), si existe, es **única**.

### CÓMO SE RESUELVE

Supón dos óptimos  $x^* \neq x^{**}$ . Ambos maximizan  $\Rightarrow x^* \sim x^{**}$ . La mezcla  $z = \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}$  es asequible ( $p \cdot z = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m$ ) y, por convexidad **estricta**,  $z \succ x^{**}$ : asequible y mejor que el óptimo  $\Rightarrow$  contradicción. Único.  $\square$

### LA TÉCNICA

La estricta convexidad "premia el promedio": dos óptimos harían que su punto medio (asequible, por presupuesto lineal) fuera mejor. Puente exacto a la unicidad de la demanda en I.2.

### REFERENCIA

Jehle-Reny, §1.2–1.3, pp. 11–22 ; Módulo 0 (0.3–0.4, Anexo A).

## B Parte B · Diez ejercicios para ti (sin respuesta)

Mezcla de cálculo y demostración. Mándame **el proceso completo**. Rúbrica: enunciado correcto + cada paso justificado + cita del axioma/teorema usado + sin saltos. Diagnostico causa raíz de cada error.

### EJ 1 · CÁLCULO

Con  $u = x^3y$ , calcula la TMS en  $(1, 1)$  e interprétala.

### EJ 2 · DEMOSTRACIÓN

Demuestra que la indiferencia  $\sim$  es transitiva (usa completitud y transitividad de  $\succeq$ ).

### EJ 3 · CÁLCULO

Con  $u = x^{1/4}y^{3/4}$ , halla la TMS y evalúala en  $(2, 2)$ . ¿Qué bien "pesa" más?

### EJ 4 · DEMOSTRACIÓN

Demuestra el Teorema 1.2: si  $u$  representa  $\succeq$  y  $f$  es estrictamente creciente, entonces  $f \circ u$  representa  $\succeq$ .

### EJ 5 · MIXTO

Audita los cinco axiomas para  $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ : ¿continua?, ¿monótona estricta?, ¿convexa (estricta)? Justifica (para convexidad, usa el Hessiano orlado).

### EJ 6 · CÁLCULO + PRUEBA

Para  $u = x^{1/3}y^{2/3}$ , calcula  $\det \bar{H}$  con la fórmula general y concluye cuasiconcavidad; verifica TMS decreciente sobre una curva de indiferencia.

### EJ 7 · MIXTO

Para  $u = \min\{2x, 3y\}$ : describe las curvas, ubica el vértice, explica por qué la TMS no existe ahí y di qué axiomas cumple (¿monotonía estricta?, ¿convexidad estricta?).

### EJ 8 · CÁLCULO

CES con  $\rho = -1$ : escribe la TMS explícita y la elasticidad  $\sigma$ . ¿A qué caso se parece más (sustitutos o complementos)?

### EJ 9 · DEMOSTRACIÓN

Demuestra que **monotonía estricta**  $\implies$  las curvas de indiferencia no tienen tramos con pendiente positiva.

#### EJ 10 · DEMOSTRACIÓN (extremo)

(a) Reproduce la prueba del Teorema 1.1 (construcción por la diagonal) señalando dónde se usa cada axioma. (b) Explica qué paso falla exactamente para las lexicográficas.

## § Modo examen (3 preguntas al estilo del parcial)

Simulacro con los **tres tipos** de pregunta que suelen caer: teórica, cálculo y demostración. Intenta a libro cerrado y luego contrasta.

#### PREGUNTA 1 · TEÓRICA

Enuncia los cinco axiomas sobre  $\succeq$  y, en una frase por axioma, di qué irregularidad prohíbe cada uno.

#### RESPUESTA MODELO

**1 Completitud** (todo par es comparable — prohíbe "no sé"). **2 Transitividad** (sin ciclos — prohíbe la bomba de dinero). **3 Continuidad** ( $\succeq(x)$ ,  $\preceq(x)$  cerrados — prohíbe saltos/inversiones en el límite). **4**

**Monotonía/no-saciedad** (más es mejor / nunca saciado — prohíbe zonas de indiferencia gruesas y que sobre el presupuesto). **5 Convexidad** (gusto por promedios — prohíbe curvas de indiferencia "abolladas"; la estricta prohíbe tramos rectos).

#### REFERENCIA

Jehle–Reny, §1.2, pp. 5–13 .

### PREGUNTA 2 · CÁLCULO

Para  $u(x, y) = x^a y^{1-a}$  ( $0 < a < 1$ ): (i) halla la TMS; (ii) prueba cuasiconcavidad con  $\det \bar{H}$ ; (iii) verifica que la TMS decrece sobre una curva de indiferencia.

#### RESPUESTA MODELO

(i)  $TMS = \frac{a}{1-a} \frac{y}{x}$ . (ii) Con  $b = 1 - a$ ,  $\det \bar{H} = a(1-a)x^{3a-2}y^{1-3a} > 0 \Rightarrow$  cuasicóncava. (iii) Sobre  $u = k$ ,  $y$  baja cuando  $x$  sube, así que  $\frac{y}{x}$  —y la TMS— decrece.

#### REFERENCIA

Jehle–Reny, §1.2, p. 12 ; Anexo A.

### PREGUNTA 3 · DEMOSTRACIÓN

Demuestra que si  $\succeq$  es estrictamente convexa, la solución del problema del consumidor es única. Indica dónde usas la convexidad estricta y dónde la linealidad del presupuesto.

#### RESPUESTA MODELO

Dos óptimos  $x^* \neq x^{**}$  serían indiferentes. Su promedio  $z$  cumple  $p \cdot z = m$  (linealidad  $\Rightarrow$  asequible) y  $z \succ x^{**}$  (convexidad estricta): asequible y mejor que el óptimo  $\Rightarrow$  contradicción. Único.  $\square$

#### REFERENCIA

Jehle–Reny, §1.2–1.3 ; Módulo 0 (0.3–0.4).



---

## § Referencias (para trabajar en paralelo con el libro)

La guía es la "versión traducida" con las pruebas desmenuzadas; el rigor completo y las variantes están en:

- **Texto base** — **Jehle, G. & Reny, P. (2011).** *Advanced Microeconomic Theory*, 3rd ed., Pearson. **Cap. 1, §1.1–1.2, pp. 3–19.** Clave: Def. 1.4 (p. 7); Axiomas 1–5 (pp. 5–13); Teorema 1.1 —existencia, prueba de la diagonal— (p. 14); Teorema 1.2 —invariancia ordinal— (p. 17); TMS (p. 12).
- **Apoyo** — **Varian, H. (1993).** *Análisis microeconómico*, 3ª ed., Antoni Bosch. **Cap. 7** (preferencias, utilidad, TMS; intuición).
- **Profundidad** — **Mas-Colell, A., Whinston, M. & Green, J. (1995).** *Microeconomic Theory*, Oxford. **Cap. 1** (preferencia y elección) y **Cap. 3** (demanda clásica; lexicográficas, cuasiconcavidad, unicidad).
- **Fundamentos** — **Debreu, G. (1959).** *Teoría del valor*, Antoni Bosch. **Cap. 4** (axiomática del consumidor; no-representabilidad lexicográfica).
- **Español** — **Del Villar, R.** *Lecciones de Microeconomía* (tratamiento riguroso en español).
- **Prerrequisitos propios:** Módulo 0 — 0.3 (optimización, función implícita), 0.4 (correspondencias/Berge), **Anexo A** (concavidad, cuasiconcavidad, Hessiano orlado).

---

Guía de Estudio I.1 v3 (demostraciones con traducción profunda) — Preferencias, axiomas y utilidad · Tema I. Base: Jehle–Reny Cap. 1, §1.1–1.2 (pp. 3–19). Cada prueba: Dice (formal) / Traducción / Para captarlo / Ejemplo. Números y Hessianos verificados con SymPy. Siguiendo: I.2 — El problema del consumidor. Tema claro; MathJax embebido.